Université Abdelmalek Essaâdi
FST Tanger/Année 11-12/
MIPC/M121

Devoir libre

Exercice1

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice2

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Que peut on en déduire?

Exercice3

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice4

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) + y^2\sin(1/y) & \text{si } xy \neq 0,, \\ x^2\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, y = 0, \\ y^2\sin(1/y) & \text{si } x = 0 \text{ et } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que les deux fonctions $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues en $(0,0)$.
2. Montrer que, par contre, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$ n'existent pas.



Exercice5

1. Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2. On définit la fonction $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ par

$$F(r,\theta) = f(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta).$$

Vérifier que, pour tout $(r,\theta) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, on a

$$\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta),$$

où $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

2. Soit $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2. On définit la fonction $F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ par

$$F(r,\beta,\theta) = f(x = r\sin\beta\cos\theta, y = r\sin\beta\sin\theta, z = r\cos\beta).$$

Vérifier que, pour tout $(r,\beta,\theta) \in \mathbf{R}^* \times \{t \in \mathbf{R};\, t \neq k\pi,\, k \in \mathbf{Z}\} \times \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}\Delta f(r\sin\beta\cos\theta, r\sin\beta\sin\theta, r\cos\beta) &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\beta,\theta) + \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\beta,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}(r,\beta,\theta) \\ &+ \frac{1}{r^2(\sin\beta)^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\beta,\theta) + \frac{\cot\beta}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \beta}(r,\beta,\theta),\end{aligned}$$

où $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Exercice6

1. Montrer que l'ensemble $U = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\, x > 0\}$ est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.
2. Soit $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$. On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbf{R}$ si, pour tout $t > 0$, $f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y)$. Soit $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ homogène de degré α et de classe C^2. Montrer que

$$\alpha(\alpha - 1) f(x,y) = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

3. En effectuant le changement de variable $u = x$ et $v = \dfrac{y}{x}$, déterminer toutes les fonctions $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ homogènes de degré 1 et de classe C^2.

Exercice7

Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$; $f(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Trouver un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ sur lequel f est différentiable. Calculer $df(x,y)$ pour $(x,y) \in U$.

